«КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАТИКИ И ДИЗАЙНА»

Профессиональное образовательное частное учреждение

Утверждаю
Директор ПОЧУ КИД
_______________ О.В.Пенько
«30 » августа 2023

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

по учебной дисциплине ЕН.01 «МАТЕМАТИКА»

По специальности среднего профессионального образования

социально-экономического профиля

40.02.01 «Право и организация социального обеспечения»

Москва 2023

Организация разработчик: ПОЧУ «Колледж информатики и дизайна» (ПОЧУ КИД)

Методические указания обсуждены на заседании ПЦК «Общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей 40.02.01» специальности «Право и организация социального обеспечения» ПОЧУ КИД «23» августа 2023г.
и рекомендованы к использованию в учебном процессе.

Председатель предметной (цикловой) комиссии
__________/Арзамаскин С.Ю./
Подпись ФИО

УТВЕРЖДЕНО.
Заместитель директора по воспитательной работе ПОЧУ КИД
__________/Пенько Ю.Н./
Подпись ФИО
«30» августа 2023 г.

Составители (авторы): Ефигина А.Р., Преподаватель ПОЧУ КИД

Ф.И.О., ученая степень, звание, должность

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина ЕН.01 Математика относится к естественно- научному циклу основной профессиональной образовательной программы.

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» у обучающихся формируются следующие общие компетенции:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы.

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- производить действия над матрицами;
- решать системы линейных уравнений методами Крамера и Гаусса;
- решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;
- применять основные методы интегрирования при решении задач;
- применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности;

знать:

- основные элементы линейной алгебры;
- основные понятия и методы математического анализа;
- основные методы решения прикладных задач

В соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом (ФГОС) программа изучения каждой из дисциплин, входящих в учебный план, предусматривает, кроме обязательных часов аудиторной работы, также и определенные объемы самостоятельной работы студента. Количество часов, отведенное на самостоятельную работу - 42, самостоятельных работ-4.

Одной из важных задач в подготовке специалистов является выработка и развитие у студентов навыков к самообразованию, способности самостоятельно овладеть знаниями с тем, чтобы успешно применять их в последующей профессиональной деятельности. Основной формой самообразования является самостоятельная работа студента (СРС).

СРС может быть истолкована в двух смыслах:

Во-первых, как процесс творческого мышления студента при решении какой-либо проблемы, задачи, усвоения того или иного материала независимо от того, происходит это в аудитории, дома или в библиотеке. Ведь студент на лекции не только слушает и конспектирует, но и анализирует, сопоставляет, оценивает сообщенный лектором материал – т.е. является активным участником образовательного процесса.

Во-вторых, как некий результат мыслительной деятельности в виде написания реферата, доклада, контрольной работы, решении индивидуального домашнего задания и т. д. В этом смысле самостоятельная работа студента является своего рода продолжением аудиторных занятийдома, в библиотеке, углублением и дополнением знаний, полученных в аудитории.

Самостоятельная работа студента предусматривает:

- Решение задач по пройденному теоретическому материалу

-**Задачи самостоятельной работы**:

1. Повторить теоретический материал по теме.
2. Выполнить задания.

Формой контроля внеаудиторной самостоятельной работы является:

-проверка письменных работ;

Критерии оценки

Преподаватель выставляет студентам отметки за выполнение самостоятельной работы, учитывая результаты ответа студента, качество выполненных заданий и затраты рабочего времени.

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы студентов оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы студентов. Текущий контроль СРС – это форма планомерного контроля качества и объема приобретаемых студентом компетенций в процессе изучения дисциплины, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

Наименование разделов и тем	Содержание самостоятельной работы обучающихся	Объем часов
Раздел 1	**Элементы линейной алгебры**	
Тема 1.1 Матрицы и определители	**Самостоятельная работа № 1** 1. Вычислить определитель второго порядка 2. Вычислить определитель третьего порядка 3. Вычислить определитель высших порядков 4. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel	8
Тема 1.2 Системы линейных уравнений	**Самостоятельная работа № 2** 1. Решить систему методом Крамера 2. Решить систему методом Гаусса 3. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel	6
Раздел 2	**Математический анализ**	
Тема2.2. Дифференциальное и интегральное исчисление	**Самостоятельная работа № 3** 1. Найти производные функций 2. Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке 3. Найти промежутки возрастания и убывания функции 4. Исследовать функцию и построить график	6
Тема 2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения	**Самостоятельная работа № 4** Решение дифференциальных уравнений	8

Самостоятельная работа № 1

Тема 1.1 Матрицы и определители

Цель: закрепить навыки по вычислению определителей второго, третьего и высших порядков.

Виды заданий:

1. Вычислить определитель второго порядка
2. Вычислить определитель третьего порядка
3. Вычислить определитель высших порядков
4. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel

Пример выполнения работы:

1. Вычислить определитель второго порядка

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

<u>Пример:</u> вычислить определитель второго порядка

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8$

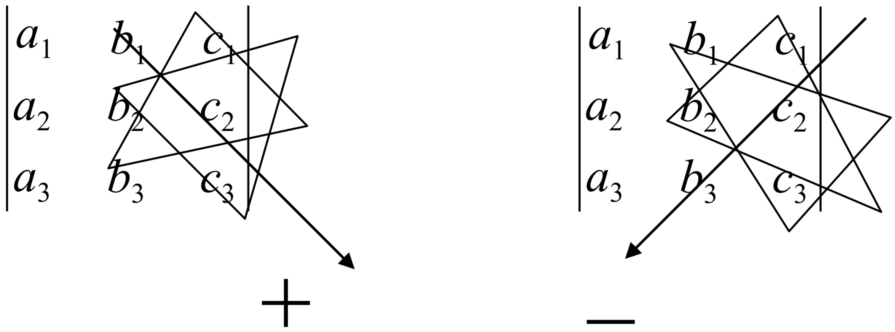
2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = -1 + 6 = 5$

2. Вычислить определитель третьего порядка

Определителем третьего порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правила называют еще «Правило треугольника»

Пример: Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 5 =$$

$$= 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

3. Вычислить определитель высшего порядка

В общем виде определитель n-го порядка может быть представлен следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где a_{ij} – элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем a_{ij} в определителе и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется **минором элемента a_{ij}.** Обозначается минор – M_{ij}.

Пример: Найти минор элемента a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_i$ - алгебраическое дополнение

<u>**ТЕОРЕМА:**</u> Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

<u>Пример:</u> Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1)^{1+1}1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -2$$

Варианты заданий:

Вариант	Задание	
1	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}2 & 3 \\ 8{,}1 & 4 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
2	1) а) D = $\begin{vmatrix} -4 & 3.9 \\ 7 & 6.2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
3	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}8 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
4	1) а) D = $\begin{vmatrix} 3{,}8 & -4{,}1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;в) D =	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
5	1) а) D = $\begin{vmatrix} 4{,}9 & -3 \\ 1{,}7 & -6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;в) D =	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
6	1) а) D = $\begin{vmatrix} 4{,}7 & -8 \\ 3{,}2 & -6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;в) D =	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

7	1) а) D = $\begin{vmatrix} 7 & -3{,}4 \\ 6 & -4{,}2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	

8	1) а) D = $\begin{vmatrix} 8,3 & -6 \\ 2,7 & -4 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	
9	1) а) D = $\begin{vmatrix} 4,8 & -7 \\ 2,4 & -3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$	
10	1) а) D = $\begin{vmatrix} 8 & -4,6 \\ 9 & -2,9 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; в) D =	$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все задания выполнены верно, выполнена проверка с помощью программы Excel, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при 1 неверно выполненном задании, или не выполнена проверка в Exel, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненном верно 1 задании, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

Самостоятельная работа № 3

Тема 1.2 Системы линейных уравнений

Цель: закрепить навыки по решению систем методом Крамера и методом Гаусса.

Виды заданий:

1. Решить систему методом Крамера
2. Решить систему методом Гаусса
3. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel

Пример выполнения работы:

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_1, x_2, …, x_n – неизвестные,

b_1, b_2, …., b_n - столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Составим вспомогательные определители системы следующим образом:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ b_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда решением системы является:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Отметим следующее:

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение

2. Если $D = Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_n = 0$, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.

3. Если $D = 0$, но хотя бы один из $Dx_1, Dx_2, \ldots, Dx_n$ не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из – за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Вычислим все определители:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Отсюда $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{5}, \quad y = \dfrac{1}{5}$

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Вычислим:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=4 \qquad Dx_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{vmatrix}=6$$

$$Dx_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix}=4 \qquad Dx_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=0$$

Тогда:

$$x_1=\frac{6}{4}=\frac{2}{3} \qquad x_2=\frac{4}{4}=1 \qquad x_3=\frac{0}{4}=0$$

Ответ: $x_1=2/3$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Индивидуальная контрольная работа:

Вариант	Задание
1	а) $\begin{cases} x+2y-z=2\\ 2x-3y+2z=2\\ 3x+y+z=8\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y-3z=-10\\ x+3y-3z=13\\ x+y-z=7\end{cases}$
2	а) $\begin{cases} -x+3y+2z=4\\ 2x-y+3z=6\\ -2x+2y-z=8\end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-4\\ x+2y-3z=9\\ 2x-2y+2z=7\end{cases}$
3	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=-5\\ 2x+2y-3z=1\\ x-2y+z=6\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=-4\\ x+2y-z=11\\ 2x-3y+2z=-2\end{cases}$
4	а) $\begin{cases} x-3y+z=-7\\ 2x+y-2z=4\\ -2x+2y-3z=2\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+z=9\\ x-2y+2z=-4\\ 2x+y-2z=-1\end{cases}$
5	а) $\begin{cases} x+3y-z=8\\ 2x-y+4z=-1\\ -2x+2y+z=4\end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+4y-z=5\\ 2x-2y+3z=-3\\ -2x+y+2z=2\end{cases}$
6	а) $\begin{cases} 2x-2y+3z=4\\ -x+2y+z=-6\\ 3x+y-2z=12\end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-3\\ x+2y-4z=7\\ 2x+y+2z=-1\end{cases}$
7	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=4\\ x-2y+z=-3\\ x+3y-z=6\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z=3\\ x-2y+z=8\\ 3x+2y-z=-1\end{cases}$
8	а) $\begin{cases} 4x-y+z=6\\ x+2y-2z=-3\\ 2x+y-3z=2\end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=4\\ -2x+2y-z=-7\\ 3x+y-2z=2\end{cases}$

9	а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ -x + 2y + z = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ -2x - 3y + z = -5 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$
10	а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все задания выполнены верно, системы решены всеми заявленными способами, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при верно выполненных заданиях, но могут системы решены не всеми требуемыми способами, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненных верно заданиях, но решение системы представлено 1 способом, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно или выполнено верно 1 задание.

Самостоятельная работа № 3

Тема2.2. Дифференциальное и интегральное исчисление

Цель: закрепить навыки по вычислению производных функций первого и второго порядков, по исследованию функций с помощью производной.

Виды заданий:

1. Найти производные функций
2. Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции
4. Исследовать функцию и построить график

Пример выполнения работы:

Обозначения: С- постоянная, х-аргумент, u, v, w – функции от х, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

1. (u+v-w)’=u’+v’-w’

2. $(u\cdot v)' = u'v + uv'$

3. $(cv)' = c\cdot v'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Примеры:

1. $У' = (3^x - 2x^5 + e^2)' = (3^x)' - 2\cdot(x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4$
2. $У' = (2^x \bullet x^3)' = (2^x)' \bullet (x^3) + (2^x) \bullet (x^3)' = 2^x \ln 2 \bullet x^3 + 2^x \bullet 3x^2$
3. $Y' = \left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)' = \frac{2x(2-x^2) - x^2\cdot(-x)}{2-x_2}$

Производная сложной функции.

Пусть дана сложная функция y=g(u), где u=f(x).

Если функция u=f(x) дифференцируема в некоторой точке x, а функция y=g(u) определена на множестве значений функции f(x) и дифференцируема в точке u=f(x), то сложная функция y=g(f(x)) в данной точке x имеет производную, которая находится по формуле

$У' = g'(u) \bullet f'(x)$.

Пример:

$У' = ((1+x^2)^5)' = 5 \bullet (1+x^2)^4 \bullet 2x$

Приложение производной к исследованию функций.

Касательная и нормаль к плоской кривой. Скорость и ускорение.

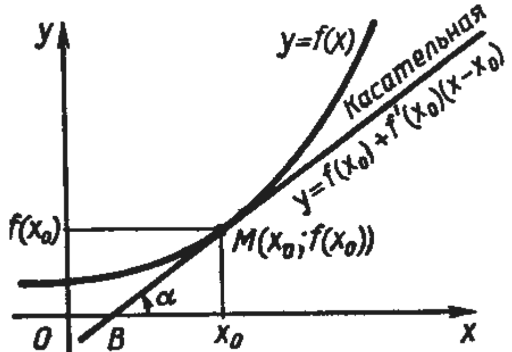
Касательная и нормаль к плоской кривой.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. $k = f'(x0) = tg\alpha$ Уравнение касательной к графику функции

$y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания *M(x0; f(x0)),* называется *нормалью* к кривой.



Возрастание и убывание функции. Экстремум функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Возрастание и убывание функции.

Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Максимум.

Функция y=f(x) имеет максимум x=a, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство f(a)>f(x).

Признаки максимума:

1. f'(a)=0;
2. f'(x) при переходе аргумента через x=a, меняет знак с «+» на «-».

Минимум.

y=f(x) имеет минимум x=a, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство f(a)<f(x).

Признаки максимума:

3. f'(a)=0;
4. f'(x) при переходе аргумента через x=a, меняет знак с «-» на «+».

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке [*а;в*]. Тогда она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается на концах отрезка [*а;в*].

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке [а;в] функции:

1. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку [*а;в*], и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка [*а;в*], т.е. найти *f(a)* и *f(в)*.

3. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке [*а;в*]; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

Например. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение:

1. Находим критические точки, принадлежащие интервалу (- 1; 2) и значения функции в этих точках:

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2;\ 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0;\ 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0;$

$x^1 = 0,\ x^2 = 1,\ x^3 = 3.$

Критическая точка $x^3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

2. Вычисляем значения функции в двух других критических точках:

$y(0) = 3,\ y(1) = 4.$

3. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка:

$y(-1) = -8,\ y(2) = -5.$

4. Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что

$$\max_{[-1,2]} y = y(1) = 4,\quad \min_{[-1,2]} y = y(-1) = -8.$$

Исследование функций и построение их графиков.

Схема исследования функции и построения её графика:

1) найти область определения функции и определить точки разрыва, если они имеются;

2) исследовать функцию на четность и нечетность;

3) исследовать функцию на периодичность;

4) определить точки пересечения с осями координат, если это возможно;

5) найти критические точки функции;

6) определить промежутки монотонности и экстремумы функции;

7) определить промежутки вогнутости и выпуклости кривой и найти точки перегиба;

8) найти асимптоты графика функции;

9) используя результаты исследования, соединить полученные точки плавной кривой; иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Например. Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить еѐ график.

Решение:

1) функция определена на всей числовой прямой, т.е. D(y) = R;

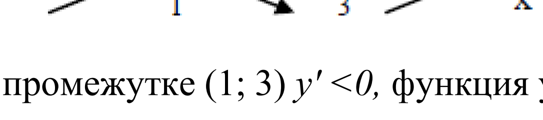
2) $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = - x^3 - 6x^2 - 9x - 3$, функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция не является периодической;

4) найдем точку пересечения графика с осью *ОУ:* полагая $x = 0$, получим $y = - 3$; точки пересечения графика с осью *OX* в данном случае найти затруднительно.

5) найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; найдем критические точки $f'(x) = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, получим $x = 1$ и $x = 3$ – критические точки.

6) в промежутках (-∞; 1) и (3; +∞) $y' > 0$, функция возрастает; в

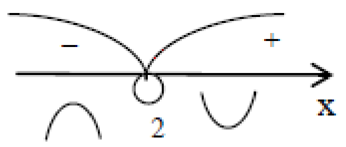


промежутке (1; 3) $y' < 0$, функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус,

а при переходе через точку $x = 3$ – с минуса на плюс. Значит *ymax = y(1)= 1, ymin = y(3) = - 3.*

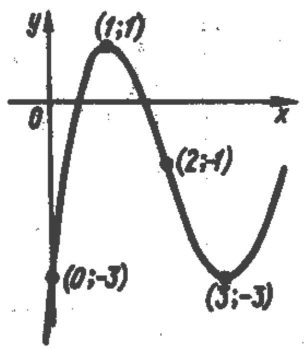
7) найдем вторую производную *y''= 6x – 12, y''=0, 6x – 12= 0, x = 2;* в промежутке (-∞; 2) *y'' <0,* кривая выпукла вверх,

в промежутке (2; +∞) *y'' >0,* кривая выпукла вниз.



Получаем точку перегиба (2;-1). 8) график функции асимптот не имеет;

9) используя полученные данные, строим искомый график.



Индивидуальная контрольная работа

1 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=\cos^3(x^2+8)$; б) $f(x)=\dfrac{3x^3}{(4x-2)^3}$ в) $f(x)=\sin^3(4x^2+3x-8)$;

2.Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 3x – x^3$

2 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=3(x^5+7x^3+1)^4$; б) $f(x)=\dfrac{(x^3-1)^4}{x^3}$; в) $f(x)=4\ln(x^6+5)-5x+2$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = x^3 – 12x$

3 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=3(5x^2-x+4)^6$; б) $f(x)=2\ln(x^6+5)$; в) $f(x)=\cos^4(4x-x^2)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = \frac{x^3}{6} - 12x$

4 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=tg^4(x-x^2)$; б) $f(x)=3^{\cos5x+2}$ в) $f(x)=(x^2-1)*(x+3)^4$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 5x - \frac{x^3}{3}$

5 вариант.

1. Найти производную функции:

а) а) $f(x)=\sin^3(x-3)$; б)$f(x)=(x^2-1)*(x+3)$; в) $f(x)=3^{\cos5x+2}$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x - 1$

6 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=6(x^2+4x^3+12)^4$; б)$f(x)=\ln(x^3-4x)$; в) $f(x)=\frac{4x^3}{(8x-2)^3}$.

6. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 2 + \frac{3}{2} \qquad \frac{x^3}{2}$

7 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=\cos^2(x^2+x-1)$; б) $f(x)=2^{\sin3x+2;}$ в) $f(x)=\sin^3(x-3)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 1 + 4x - \frac{x^3}{3}$

8 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=(2x^6+3x^4+1)^4$; б) $f(x)=\frac{(x^2+2)^4}{x^2}$ в) б)$f(x)=(x^2-1)*(x+3)^4$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 3$

9 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=(x^3-6)*(x+4)^2$; б) $f(x)=\frac{(x^2+1)^2}{x^2-2}$ в) $f(x)=\sin^3(4x^2+3x-8)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

10 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=\sin(x^2+5)$; б) $f(x)=\frac{(x^3+10)}{x^3}$ в) $f(x)=4\ln(x^6+5)-5x+2$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 3x^2 - x^3$

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, построен график функции верно, работа оформлена подробна и аккуратна;

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, построен график функции верно, работа оформлена подробна и аккуратна

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, но исследование функции проведено верно, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

Самостоятельная работа № 4

Тема 2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цель: закрепить навыки по теме дифференциальные уравнения в частных производных

Задание 1.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 5x_2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -8x_1 - 5x_2. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 8x_2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 - 8x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 3x_2. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2. \end{cases}$

Задание 2.

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1) $y'' y^3 = 1$. 2) $y''' = (y'')^3$.

3) $(x-1)y'' - y' = x(x-1)^2$. 4) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

5) $yy'' + (y')^2 = 0$. 6) $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

7) $(1-x^2)y'' = xy'$. 8) $xy'' + y' = x^2$.

9) $xy''' + y'' = 1 + x$. 10) $y'' = -\frac{x}{y'}$.

Задаине3. Решить обыкновенные дифференцированные уравнения

1. $y'' + 8y' = 8x$.
2. $y'' - 2y' = x2 - x$.
3. $y'' + 7y' + 12y = 24x2 + 6x - 15$.
4. $y'' - 2y = xe - x$.
5. $y'' + 3y' = 3xe - 3x$.
6. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e - 2x$.
7. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e - x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
8. $y'' - 2y' = ex(x2 + x - 3)$, $y(0) = y'(0) = 2$.
9. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$.

10. $y'' + 2y' = 4ex(\sin x + \cos x)$.

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, построен график функции верно, работа оформлена подробна и аккуратна;

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, построен график функции верно, работа оформлена подробна и аккуратна

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, но исследование функции проведено верно, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

Список литературы:

1. Барвенов С.А. Математика [Электронный ресурс]: тренинг задач, используемых на централизованном тестировании/Барвенов С.А.. Бахтина Т.П. – Электрон. Тестовые данные. –Минск. ТетраСистемс, Тетралит, 2013. – 432 с. Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.
2. Мартышова Л.И. Открытые уроки алгебры и начал математического анализа. 9-11 классы [Электронный ресурс]/Мартышова Л.И. – Электронные тестовые данные. М.: ВАКО, 2013. – 272 с. Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.

Дополнительная литература:

3. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. /В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 4-е изд., стре. – М.: Издательский центр «Академия», 2014, - 160 с. ISBN 978-5-4468-0707-9 / Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.
4. Березина Н.А. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Н.А. Березина— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.

Интернет-ресурсы

1. http://www.exponenta.ru/educat/links/l_educ.asp#0 – Полезные ссылки на **сайты математической и образовательной направленности:** Учебные материалы, тесты
2. http://www.fxyz.ru/ - Интерактивный справочник формул и сведения по алгебре, тригонометрии, геометрии, физике.
3. http://maths.yfa1.ru - Справочник содержит материал по математике (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия).