«КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАТИКИ И ДИЗАЙНА»
Профессиональное образовательное частное учреждение

Утверждаю
Директор ПОЧУ КИД
______________ О.В.Пенько
«30 » августа 2023

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
по учебной дисциплине
ЕН.01 «МАТЕМАТИКА»

По специальности среднего профессионального образования социально-экономического профиля

40.02.01 «Право и организация социального обеспечения»

Москва 2023

Организация разработчик: ПОЧУ «Колледж информатики и дизайна» (ПОЧУ КИД)

Методические указания обсуждены на заседании ПЦК «Общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей 40.02.01» специальности «Право и организация социального обеспечения» ПОЧУ КИД «23» августа 2023г.
и рекомендованы к использованию в учебном процессе.

Председатель предметной (цикловой) комиссии
___________/Арзамаскин С.Ю./
Подпись ФИО

УТВЕРЖДЕНО.
Заместитель директора по воспитательной работе ПОЧУ КИД
____________/Пенько Ю.Н./
Подпись ФИО
«30» августа 2023 г.

Составители (авторы): Ефигина А.Р., Преподаватель ПОЧУ КИД

Ф.И.О., ученая степень, звание, должность

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина ЕН.01 Математика относится к естественно- научному циклу основной профессиональной образовательной программы.

Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» у обучающихся формируются следующие общие компетенции:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы.

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- производить действия над матрицами;
- решать системы линейных уравнений методами Крамера и Гаусса;
- решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;
- применять основные методы интегрирования при решении задач;
- применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности;

знать:

- основные элементы линейной алгебры;
- основные понятия и методы математического анализа;
- основные методы решения прикладных зада

Освоение учебной дисциплины «Математика» предлагает практическое осмысление ее разделов и тем на практических занятиях, которые должны способствовать формированию у обучающегося общих и профессиональных компетенций, приобретению необходимых умений, закреплению и углублению теоретических знаний.

Наименование разделов и тем	Практические занятия, обучающихся	Объем часов
Раздел 1	**Элементы линейной алгебры**	
Тема 1.1 Матрицы и определители	**Практическое занятие № 1** Решение задач на выполнение действий над матрицами Решение задач на вычисление определителей 2-го и 3-го порядков	4
Тема 1.2 Системы линейных уравнений	**Практическое занятие № 2** Решение СЛУ по формулам Крамера Решение СЛУ методом Гаусса	4
Тема 2.1 Введение в анализ	**Практическое занятие № 3** Решение задач на вычисление пределов	2
Тема2.2. Дифференциальное и интегральное исчисление	**Практическое занятие № 4** Решение задач на вычисление производной функции Решение задач на вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной Решение задач на вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям	6
Тема 2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения	**Практическое занятие № 5** Решение дифференциальных уравнений первого порядка	2
Тема 2.4. Дифференциальные уравнения в частных производных	**Практическое занятие № 6** Решение дифференциальных уравнений с использованием задачи Коши	2
	Итого:	20

Практическое занятие № 1
Тема 1.1 Матрицы и определители
Цель: Закрепить навык решения задач матричных моделей, вычисление определителей.
Задание 1.Решение задач на выполнение действий над матрицами.
Задание 2.Решение задач на вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.

Решение задач на выполнение действий над матрицами.

Краткая теория

Матричные модели представляют собой модели, построенные в виде таблиц (матриц).Эти модели находят широкое применение при решении плановых или экономических задач и при обработке больших массивов информации. Матрица – прямоугольная таблица чисел. Например:

товар	Склад 1	Склад 2	Склад 3
Сахар	200	100	150
Соль	350	200	180
мука	400	250	260

Эти данные можно записать в виде матрицы (*)
200 100 150
350 200 1 0 = A (*)
400 250 260
Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений
3x-5y+z=14
X+3y-7z=-22
2x+y-3z=-6 можно записать в виде матрицы (**)
3 −5 1
1 3 − = A (**)
2 1 −3
Матрица-прямоугольная таблица чисел. Любое число такого массива называется элементом матрицы. Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально называется строкой, а вертикально – столбцом. Количество строк – m, количество столбцов – n, если m=n – матрица квадратная
Размерность матрицы – количество элементов в ней.
A= $a11$ $a12$
$a21$ $a22$
Воображаемая линия квадратной матрицы, пересекающая ее от a_{11} до a_{mn} называется главной диагональю.Квадратная матрица, в которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.Диагональная матрица, у которой все элементы, расположенные по главной диагонали – единицы, называется единичной.
Матрица, состоящая из одного столбца, называется вектор-столбцом.
Матрица, состоящая из одной строки, называется вектор-строкой.
Суммой (разностью) двух матриц A и B, имеющих mстрок nстолбцов, называется матрица, полученная в результате сложения (вычитания) одноименных элементов матриц A и B. Получаемая в результате матрицы C имеет ту же размерность m*n.
Матрицу можно умножить на число, для этого надо на это число умножить каждый элемент матрицы.
Умножение матрицы-строки на матрицу-вектор:
A=(a1, a2, a3) –вектор-строка.

$$B = \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{vmatrix} \text{ - вектор-столбец}$$

$C = A*B = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \sum_{i=} a\ \ b$

Произведением двух матриц - матрицы A(m·n) на матрицу B(n·p) – называется матрицаC(m·p), каждый элемент которой вычисляется по

формуле: $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы.
2.Что называют элементами матрицы.
3.Какая матрица называется квадратной? Диагональной? Единичной? Вектор-столбцом? Вектор-строкой?
4.Дайте определение суммы матриц.
5.Сформулируйте правило умножения матрицы на число.
6.Сформулируйте правило умножения матриц.

Задания

1. Сложить матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = A$; $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = B$.

2.Вычесть из матрицы А матрицу В: $A = \begin{vmatrix} & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Умножить матрицу А на матрицу В: $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{vmatrix}$.

4. Сложить, вычесть и умножить каждую матрицу на 5 :

А) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 7 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & 17 \end{pmatrix}$

Критерии оценки:

0 баллов - признак отсутствует
1 балл - признак присутствует частично
2 балла - признак присутствует в полном объеме
Оценка: «5» -24-28 баллов; «4» - 17-23 баллов; «3» - 10-16 баллов; «2»- 0-9 баллов

Решение задач на вычисление определителей 2-го и 3-го порядков

Краткая теория

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$, результат вычисления – любое действительное число.

2) Для вычисления определителя третьего порядка (матрицы 3×3) применяют правило треугольника (Сарруса), по которому составляют формулу, аналогичную формуле пункта 1.

«+» « - »

Элементы главной диагонали и ее параллелей умножаются со знаком «плюс», элементы побочной диагонали и ее параллелей – со знаком «минус», тогда:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}$$

3) Для вычисления матрицы, обратной данной, необходимо:

1. Найти определитель Δ заданной матрицы по формулам пункта 1 и 2.
2. Найти алгебраические дополнения по формулам:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Составить матрицу: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Транспортировать ее (строки и столбцы поменять местами)

$A^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ и найти обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

4. Проверка производится по формуле:

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При решении системы уравнений по <u>формулам Крамера</u> необходимо:

1) Найти определитель Δ матрицы системы, которая состоит из коэффициентов при неизвестных **x, y, z** по правилу треугольника.

2) Составить матрицу-столбец свободных коэффициентов.

3) Найти определитель при первом неизвестном **(x)**. Для этого нужно вместо первого столбца матрицы системы подставить столбец свободных коэффициентов и найти Δx.

4) Аналогично определить Δy и Δz.

5) Найти **x, y, z** по формулам $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta A}, \ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta A}, \ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta A}$. Сделать проверку.

6) Если $\Delta = 0$, то система решений не имеет.

Пример решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных составляют матрицу системы A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$, а свободные коэффициенты

матрицу – столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\det A = \Delta$ (определитель системы)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Если в определителе поочередно менять столбец коэффициентов при x_1, x_2, x_3 на столбец свободных коэффициентов, то получим следующие определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{32}a \quad a & a13 \\ b_2 & a_{22} & & a_{23} \\ b_3 & & & \end{vmatrix}$$

$a_{33}b$

a_{11} a

b_1 1 3

$\Delta x_2 =$ a 2 3

a_{21} b_2 a 3 3

a_{31} b_3

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \text{ тогда } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

Решением системы будет являться конечная последовательность чисел c_1, c_2, c_3, при которых каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство.

Особенности решения:

$$\Delta = 0,\ \Delta x_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3 \ \ \textit{система решений не имеет}$$

1)
$$\Delta_{\ i=1,2,3} = 0 \ \ \textit{коэффициенты принеизвестных пропорциональны}$$

Система имеет множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 8y + Z = 2 & (1) \\ 3x - 2y + 6Z = -7 & (2) \\ 2x + y - Z = -5 & (3) \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$Z = \frac{\Delta Z}{\Delta} = \frac{107}{-107} = -1 \qquad (-3; 2; -1)$$

Проверка:

Ответ: (-3; 2; -1).

Метод Гаусса (метод исключения переменных)

1) На первом месте в системе уравнений должно стоять уравнение, коэффициент перед первым неизвестным в котором самый наименьший.

2) Исключить последовательно переменные из уравнений путем уравнения коэффициентов перед ними и алгебраического сложения.

Пример 17: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - Z = 4 & (1) \\ 2x - y + 3Z = 9 & (2) \\ x - 2y + 2Z = 3 & (3) \end{cases}$$

Решение:

1) Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x - 2y + 2Z = 3 & (1) \\ 3x + 2y - Z = 4 & (2) \\ 2x - y + 3Z = 9 & (3) \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ \\ \\ \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x+2y-Z=4 \\
(2)\text{-}(1)\cdot 3 & - \qquad\qquad\qquad\qquad (2)' \\
 & \underline{3x-6y+6Z=9} \\
 & 8y-7Z=-5
\end{array}
$$

$$(3)-(1)\cdot 2 \qquad \begin{array}{l} 2x-y+3Z=9 \\ - \\ \underline{2x-2y+4Z=6} \\ 3y-Z=3 \end{array} \qquad (3)'$$

2) Запишем новую систему:

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 8y-7Z=-5 & (2)' \;\Big|\; 3 \\ 3y-Z=3 & (3)' \;\; 8 \end{cases}$$

$(3)'\cdot 8-(2)'\cdot 3$

$$\begin{array}{l} 24y-8Z=24 \\ - \\ \underline{2y-21Z=-15} \\ 13Z=39 \qquad\qquad (3)'' \end{array}$$

3)

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 8y-7Z=-5 & (2)' \\ 13Z=39 & (3)'' \end{cases} \Rightarrow Z=3, \quad \begin{array}{|l} 8y-21=-5 \\ 8y=16 \\ y=2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x-2\cdot 2+2\cdot 3=3 \\ \\ x=1 \end{array}$$

Проверка: $\begin{cases} 3\cdot 1+2\cdot 2-3=4 & 4=4\,(B) \\ 2\cdot 1-2+3\cdot 3=9 & 9=9\,(B) \\ 1-2\cdot 2+2\cdot 3=3 & 3=3\,(B) \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

Критерии оценки:

0 баллов - признак отсутствует

1 балл - признак присутствует частично

2 балла - признак присутствует в полном объеме

Оценка: «5» -20-24 баллов; «4» - 13-19 баллов; «3» - 8-12 баллов; «2»- 0-7 баллов

Практическое занятие № 2

Цель: Закрепить навык решения систем линейных уравнений с двумя и тремя переменными, используя формулы Крамера. Закрепить навык решения систем линейных уравнений методом Гаусса

Тема1.2 Системы линейных уравнений

Задание 1.Решение СЛУ по формулам Крамера

Задание 2. Решение СЛУ методом Гаусса

Вариант1	**Вариант 2**
1. Решить систему уравнений по правилу Крамера: а) $\begin{cases} 0,3x - 0,5y = -0,9; \\ 2,1x + y = 7,2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z = 6; \\ 2x + y + z = 3; \\ x + y + z = 5. \end{cases}$ 2. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 2t = 4; \\ 3x + 3y + 3z + 2t = 6; \\ 3x - y - z + 2t = 6; \\ 3x - y + 3z - t = 6. \end{cases}$	1. Решить систему уравнений по правилу Крамера: а) $\begin{cases} 3x + 4y = -3,4; \\ 6x - 4y = 5,2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 2; \\ 2x - 3y + 2z = 2; \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$ 2. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6; \\ 2x - y - 2z - 3t = 8; \\ 3x + 2y - z + 2t = 4; \\ 2x - 3y + 2z + t = -8. \end{cases}$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. Решите систему уравнений по правилу Крамера: а) $\begin{cases} 2,4x - 5,1y = -10,5; \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4; \\ 3x + 6y + 2z = 4; \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$ 2. Решите систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0; \\ 2x + y + 3z + t = 12; \\ x + 3y + z + 2t = 10; \\ 3x - y - z + 3t = 17. \end{cases}$	1. Решите систему уравнений по правилу Крамера: а) $\begin{cases} 4x - 2y = 2,8; \\ 7x + 4y = -2,6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = 0; \\ x - y - 3z = 13; \\ 3x - 2y + 4z = -15. \end{cases}$ 2. Решите систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x - y + 3z - 2t = 1; \\ 6x + 2y - 2z + t = 8; \\ x - 2y + 3z - 2t = -2; \\ 2x + 2y - 3z + t = 1. \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем второго порядка?
2. Перечислите свойства определителей.
3. Запишите формулы Крамера для решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Практическое занятие № 3
Тема 2.1. Введение в анализ
Цель: Повторить методы вычисления пределов функции в точке и на бесконечности.
Задание:Решение задач на вычисление пределов

Вариант 1

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-1}{4-x+3x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{3x}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x+1}{2x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-1)(5x+1)$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)$

Вариант 2

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2-2x+\dfrac{4}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3-x+x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{3x}{4x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3x^2+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{64-x^2}{x-8}$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Вариант 3

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^4-3x^2+5\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2-x^4}{2x^4-x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{x^3+64}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$
5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x-5}$
6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+9}{x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x^2+1}$

Вариант 4

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-12x+20}$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}}\dfrac{3x}{2-10x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-6}{9+8x-7x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$
5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3+x}{x^3+27}$
6. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3+4x^3)$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-3x^3}{x^2+6x^4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{x^3-4x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x$

8. $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x^4-25}{x^2+5}$

9. $\lim\limits_{x\to 0{,}75}\arcsin\sqrt{x}$

Вариант 5

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-2x}{x^2-x^3+5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+4}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{4-2x-x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-7x+10}$
7. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(x^2+3x-5)$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4}{5x-6}$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}}\arccos 3x$

Вариант 6

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5+x}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{25-x^2}{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-x-x^2}{6x^2-x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to -2}(3x-1)(x+4)(x^2-1)$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\lg(6x-2)$

Вариант 7

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2-2x+\dfrac{4}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3-x+x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{3x}{4x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3x^2+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

Вариант 8

Вычислите предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2-2x+\dfrac{4}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3-x+x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{3x}{4x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3x^2+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{64-x^2}{x-8}$ 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$	8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{64-x^2}{x-8}$ 9. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} 4^{3x-2}$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте свойство сложения и вычитания пределов.
2. Сформулируйте правило раскрытия неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$.
3. Сформулируйте правило раскрытия неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Практическое занятие № 4

Тема2.2. Дифференциальное и интегральное исчисление

Задание1. Решение задач на вычисление производной функции

Задание 2. Решение задач на вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной

Задание 3. Решение задач на вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям

Производная функции и её применение

Цель: Закрепить навыки нахождения производной различных функций, умение применять методы дифференциального исчисления для решения задач.

Вариант 1	**Вариант 2**
Задание № 1. Найти скорость при $t = 2$с, если тело движется по закону $S(t) = 4t^3 - 2t^2 + t - 5$ (м). **Задание № 2.** Найти производную функции, если: **1.** $y = (x^2 - 3x)(1 - 2x)$; **2.** $y = \dfrac{5x}{1+x^2}$; **3.** $y = (x^2 - 5x + 8)^6$; **4.** $y = \sqrt{x^2+1}$; **5.** $y = \ln(2x^2 - 3)$; **6.** $y = 3^{2x^2+4x-6}$; **7.** $y = \operatorname{arc\,tg} 5x$; **8.** $y = \sin^2 6x$;	**Задание № 1.** Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к кривой $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. **Задание № 2.** Найти производную функции, если: **1.** $y = (x^2 - 6x + 3)(2x + 1)$; **2.** $y = \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$; **3.** $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^5$; **4.** $y = \sqrt{1 - 2x - x^2}$; **5.** $y = \ln(5x^2 + 1)$; **6.** $y = 5^{3x^3+x}$;

9. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^4-a^4}\right)$.	**7.** $y=\arccos 3x^2$; **8.** $y=\operatorname{ctg}(1-x^2)$; **9.** $y=\dfrac{7^x-3}{\sin x}$.
Вариант 3 **Задание № 1.** Найти скорость при t = 3с, если тело движется по закону $S(t)=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-1$ (м). **Задание № 2.** Найти производную функции, если: **1.** $y=(1+2x-4x^2)(3x+1)$; **2.** $y=\dfrac{5x^2}{x-3}$; **3.** $y=(x^2+2x)^4$; **4.** $y=\sqrt{x^3+4}$; **5.** $y=\ln(4x^2+1)$; **6.** $y=2^{x^2+2x-7}$; **7.** $y=\arcsin(4+5x^2)$; **8.** $y=\cos(2-3x)$; **9.** $y=12^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.	**Вариант 4** **Задание № 1.** Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к кривой $y=\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2-1$ в точке с абсциссой $x_0=0$. **Задание № 2.** Найти производную функции, если: **1.** $y=(x^3-1)(1+x+x^2)$; **2.** $y=\dfrac{2x+3}{7+3x}$; **3.** $y=(5x^2+9)^5$; **4.** $y=\sqrt{4x^2+5}$; **5.** $y=\ln(ax^2+bx)$; **6.** $y=4^{5x^3+1}$; **7.** $y=\operatorname{arcctg}^2 4x$; **8.** $y=\operatorname{tg}2x$; **9.** $y=\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\dfrac{x}{\sin x}$.

Контрольные вопросы:

1. Что такое мгновенная скорость изменения функции?
2. Чему равна производная показательной функции?
3. Приведите формулу производной логарифмической функции.
4. Приведите формулу производной степенной функции.

Задание 2. Решение задач на вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной

Цель: Закрепить навыки нахождения неопределённых интегралов, используя различные методы интегрирования.

Задания:

Найти интегралы:

1. $\int (x-5)^2\,dx$

2. $\int \dfrac{dx}{(3x-1)^2}$

3. $\int x\cos(x^2+3)dx$

4. $\int(-2x^3+6x^2)dx$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}}dx$

6. $\int\frac{2\cos x dx}{3\sin x+5}$

7. $\int\frac{5-4\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

8. $\int e^{-x^3+2}x^2dx$

9. $\int(2x^3-5x^2+7x)dx$

10. $\int\frac{3+2x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

11. $\int\frac{dx}{16+x^2}$

12. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

13. $\int\frac{6dx}{3x+7}$

14. $\int\frac{xdx}{5+x^2}$

15. $\int\frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x}}dx$

16. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$

17. $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$

18. $\int\frac{32^x-2^x}{4^x}dx$

19. $\int 5^{3x^2}xdx$

20. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arc\,tg}x}$

21. $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x+2}}{\cos x}dx$

22. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-x}{x^2}dx$

23. $\int x^2\ln x dx$

24. $\int(4-x)e^{-3x}dx$

25. $\int(x^2-6x)e^{-x}dx$

26. $\int\ln(1+x^2)dx$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение первообразной.
2. Что называется неопределённым интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределённого интеграла.
4. Приведите формулу для нахождения интеграла сложной функции.

Задание 3. Решение задач на вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям

Цель: Закрепить умение определять метод нахождения интеграла, закрепить навыки нахождения интегралов, используя различные методы.

Задания:

Вариант 1

1. $\int \frac{5x^4+2-3x}{x^2}dx$

Вариант 2

1. $\int (3x^2+5\sqrt[3]{x^2}+3\sin x)dx$

2. $\int (2x^3 + 3\sqrt{x} - 9^x)dx$

3. $\int \frac{(\ln x+3)^2}{x}dx$

4. $\int \text{arc tg}\, 2x\,dx$

5. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}}$

6. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{3\cos^2\frac{x}{3}}$

7. $\int_0 \frac{e^x}{e^x+5}dx$

8. $\int_0^8 (8\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{2x})dx$

9. $\int_{-1}^{0} \arccos x\,dx$

2. $\int \frac{1+2x+3x^3}{x}dx$

3. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

4. $\int \ln(x+4)dx$

5. $\int \frac{\sqrt{\text{arc tg}\, x}\,dx}{1+x^2}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x\cos x\,dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$

8. $\int_0^9 \left(4\sqrt[3]{3x} - 3\sqrt{x}\right)dx$

9. $\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\,dx$

Контрольные вопросы:

1. Укажите свойства определённого интеграла.
2. Назовите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Как вычислить определённый интеграл, используя интегрирование по частям?

Практическое занятие № 5

Тема 2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цель: Закрепление навыка решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка различными способами

Задание: Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Краткая теория

Дифференциальные уравнения позволяют решить многие прикладные задачи.

Пример 1

При планировании товарных запасов в днях целесообразно использовать уравнение ydy=(

b+$\frac{}{x}$)dx, где у- однодневный оборот квартала; х – запасы в днях;а иb –параметры уравнения; а=20; b=40. Найти решение данного уравнения.

Решение. = b) d$\frac{}{x}$x;

$\frac{y^2}{2}$= *40x+20·ln|x|+C*

Многие дифференциальные уравнения, не являясь уравнениями с разделяющимися переменными, приводятся к ним с помощью замены переменных. К таким уравнениям относятся однородные уравнения, общий вид которых $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$. *(*)*

При решении таких уравнений делается замена переменной y по формуле $y=u(x)$, где u– новая переменная. Тогда
$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, а $u = \frac{y}{x}$. Подставляя эти выражения в уравнение (*) получим $\frac{du}{dx}x + u = f(u)$, т.е.

уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные получаем $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$.
Интегрирование дает Ф(u) – ln|x| = С, где Ф(u) – одна из первообразных функций функции . заменяя $u=\frac{y}{x}$ получаем

$Ф(\frac{y}{x})-ln|x| = C$. Множество решений, даваемых этой формулой. Должно быть дополнено решениями вида $u = u_o$, если $f(u_o)-u_o = 0$, или
$y = u_o x$.
Пример 2
Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} =$
Решение
Разделим и числитель и знаменатель на x^2:
$\frac{dy}{dx} = = u$, получим $\frac{du}{dx}x + u =$ или
$\frac{du}{dx}x+u=$, или $\frac{du}{dx}x = -u$; $\frac{du}{dx}x= \frac{u-u^2}{1+u^2}$
$Ln|\frac{u}{u^2-1}| - ln|x|=lnC$; $y = (y^2-x^2)C$
Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $\frac{dy}{dx}=f(x)y + q(x)$, где функции $f(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a,b). Если $q(x)=0$, то $\frac{dy}{dx}= f(x)y$. Решение последнего уравнения может быть в виде: $y = C^{(x)}$, где $F(x)$ – первообразная функция по отношению к $f(x)$. Это же уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.
Пример 2
Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - = (x+1)^2$

Решение
Это линейное уравнение: здесь f(x) = -q(x) = $-(x+1)^2$
Положим y = uz и продифференцируем это равенство по x:
$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$; подставим теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим $u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - = (x+1)^2$
Или $u\frac{dz}{dx} + z(\frac{du}{dx} -) = (x+1)^2$ (*)
так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx} - = 0$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем $\frac{du}{u} - = 0$; $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x+1}$; $ln|u| = 2\ ln|x+1|$;

$u = (x+1)^2$ Подставим теперь выражение для u в уравнение (*); тогда получим уравнение $(x+1)^2\frac{dz}{dx} = (x+1)^3$; $\frac{dz}{dx} = x+1$
отсюда находим = $(x+1)\ x$;

$z = \frac{(x+1)^2}{2} + C$
Получаем общее решение
$.y = uz = (x+1)^2[\frac{(x+1)^2}{2} + C]$
$Y = \frac{(x+1)^4}{2} + C\ (x+1)^2$

Задания

Найти общее решение дифференциальных уравнений

1) $\frac{dy}{dx} + \ = \ $; 2) $\frac{dy}{dx} - \ = $; 3) $\frac{dy}{dx} + \ =$

4) *(y-xy)dx + (x+xy)dy = 0; 5)(xy-y)dx-(x-xy)dy = 0*
6)$(y+x^2y)dx - (xy^2 - x)dy = 0$

Критерии оценки:

0 баллов - признак отсутствует
1 балл - признак присутствует частично
2 балла - признак присутствует в полном объеме

Оценка: «5» -22-28 баллов; «4» - 16-21 балл; «3» - 10-15 баллов; «2»- 0-9 баллов

Практическое занятие № 6
Тема 2.4. Дифференциальные уравнения в частных производных
Цель: Уметь решать прикладные задачи на применение численного решения дифференциальных уравнений.
Задание:Решение дифференциальных уравнений с использованием задачи Коши

Краткая теория

Дифференциальное уравнение первого порядка, содержит: независимую переменную X; зависимую переменную Y (функцию); первую производную функции: Y′.
В некоторых случаях в уравнении первого порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек» – важно чтобы в дифференциальном уравнении была первая производная y', и не было производных высших порядков – y'', y''' и т.д.
Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.
Существует множество методов решения дифференциальных уравнений через элементарные или специальные функции. Однако, чаще всего эти методы либо вообще не применимы, либо приводят к столь сложным решениям, что легче и целесообразнее использовать приближенные численные методы. В огромном количестве задач дифференциальные уравнения содержат существенные нелинейности, а входящие в них функции и коэффициенты заданы в виде таблиц и/или экспериментальных данных, что фактически полностью исключает возможность использования классических методов для их решения и анализа.
В настоящее время существует множество различных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений Мы ограничимся здесь рассмотрением наиболее широко используемый на практике методов Эйлера

Метод Эйлера Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием
$y(x_0) = y_0$. Подставив x_0, y_0 в уравнение (1), получим значение производной в точке x_0 :
$y'|_{x=x_0} = f(x_0, y_0)$. При малом Δx имеет место:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_1) = y_0 + \Delta y = y_0 + y'|_{x=x_0} \cdot \Delta x = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x.$$

Обозначив $f(x_0, y_0) = f_0$, перепишем последнее равенство в виде: $y_1 = y_0 + f_0 \cdot \Delta x.$ (2)

Принимая теперь (x_1, y_1) за новую исходную точку, точно также получим:

$y_2 = y_1 + f_1 \cdot \Delta x.$

В общем случае будем иметь: $y_{i+1} = y_i + f_i \cdot \Delta x.$ (3)

Это и есть метод Эйлера. Величина Δx называется шагом интегрирования. Пользуясь этим методом, мы получаем приближенные значения y , так как производная y' на самом деле не остается постоянной на промежутке длиной Δx. Поэтому мы получаем ошибку в определении значения функции y , тем большую, чем больше Δx. Метод Эйлера является простейшим методом численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем. Его недостатки – малая точность и систематическое накопление ошибок. Более точным является модифицированный метод Эйлера или метод Эйлера с пересчетом. Его суть в том, что сначала по формуле (3) находят так называемое «грубое приближение»:

$\tilde{y}_{i+1} = y_i + f_i \cdot \Delta x$, а затем пересчетом $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ получают тоже приближенное, но более точное значение:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2} \cdot \Delta x. \quad (4)$$

Фактически пересчет позволяет учесть, хоть и приблизительно, изменение производной на шаге интегрирования Δx, так как учитываются ее значения y' в начале f_i и в конце шага $\tilde{f}_{i+1}$ (рис. 1), а затем берется их среднее..

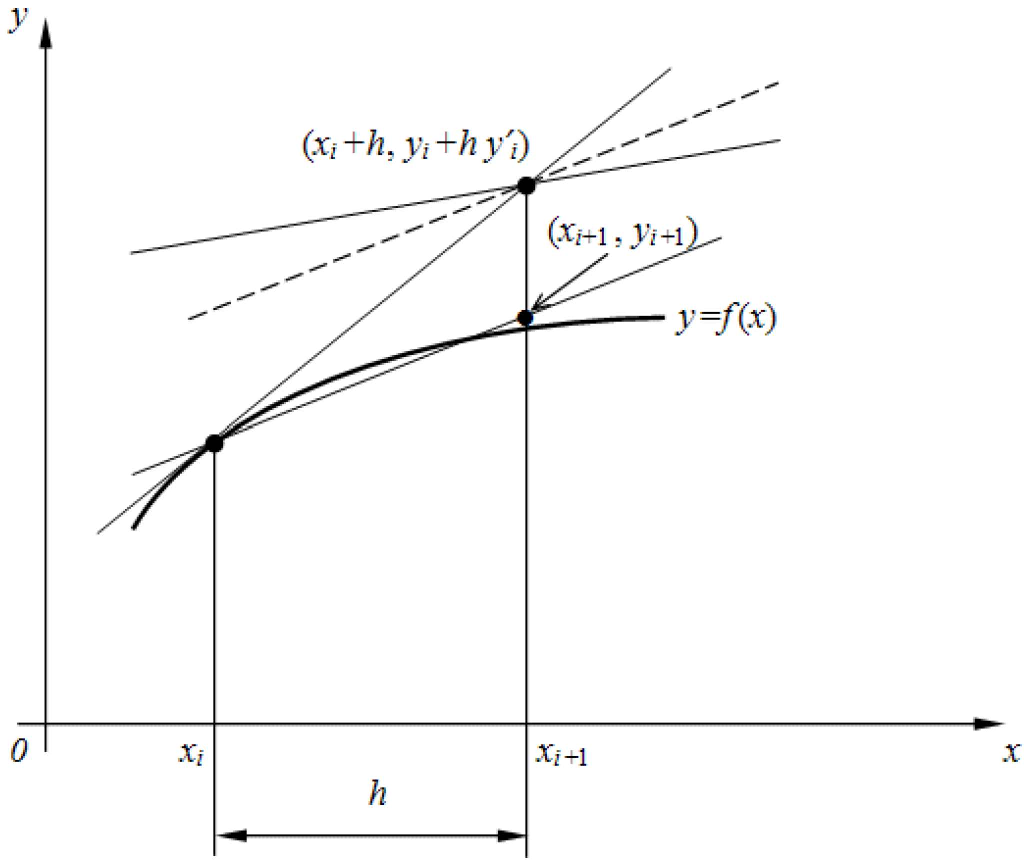

Рис. 6.1. Геометрическое представление метода Эйлера с пересчетом.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. В чем заключается особенность численного решения дифференциальное уравнения?

Задание.

Найти численное решение дифференциального уравнения: $\frac{dy}{dx}=x^2y^2$ при y(1)=1

Критерии оценки:

0 баллов - признак отсутствует
1 балл - признак присутствует частично
2 балла - признак присутствует в полном объеме
Оценка: «5» -12-14 баллов; «4» - 9-11 баллов; «3» - 5-8 баллов; «2»- 0-4 балла.

Список литературы:

Основная литература:

1. Барвенов С.А. Математика [Электронный ресурс]: тренинг задач, используемых на централизованном тестировании/Барвенов С.А.. Бахтина Т.П. – Электрон.

Тестовые данные. –Минск. ТетраСистемс, Тетралит, 2013. – 432 с. Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.

2. Мартышова Л.И. Открытые уроки алгебры и начал математического анализа. 9-11 классы [Электронный ресурс]/Мартышова Л.И. – Электронные тестовые данные. М.: ВАКО, 2013. – 272 с. Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.

Дополнительная литература:

3. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. /В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 4-е изд., стре. – М.: Издательский центр «Академия», 2014, - 160 с. ISBN 978-5-4468-0707-9 / Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.
4. Березина Н.А. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Н.А. Березина— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http6//www.iprbookshop.ru/28119/ - ЭБС «IPRbooks» по паролю.

5.